数学每日一题

高 2023 级 1 班　　宽

2025 年 6 月 12 日

- 已知函数 $f(x)=4\sin x-4\sin^3 x-a\sin 2x-2a\cos^2 x+2a^2\cos x$，若 $f(x)\geq 0$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 上成立，则实数 a 的取值范围为__________。
- 平面上五点 A,B,C,D,E 满足 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=4$，$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=5$，$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=8$，则 $|\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED}|=$__________。
- (多选) 已知直线 $l_1\parallel l_2$，A 是 l_1，l_2 之间的一定点并且点 A 到 l_1，l_2 的距离分别为 1,2，B 是直线 l_2 上一动点，作 $AC\perp AB$，且使 AC 与直线 l_1 交于点 C，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 ()
  - A. $\triangle ABC$ 面积的最小值为 2
  - B. 点 G 到直线 l_1 的距离为定值
  - C. 当 $|\overrightarrow{GB}|=|\overrightarrow{GC}|$ 时，$\triangle GAB$ 的外接圆半径为 $\frac{5\sqrt{2}}{3}$
  - D. $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}$ 的最大值为 -2
- 已知锐角 $\triangle ABC$ 满足 $\sin B+\sin C=\sqrt{3}\sin(C+\frac{\pi}{6})$ 且 $BC=2\sqrt{3}$，$\angle BAC$ 角平分线交 BC 于点 D，求 AD 的最大值__________。
- 设 i 为虚数单位，$|z|(3z+2i)=2(iz-6)$，则 $|z|=$__________。
- 已知直角 $\triangle ABC$ 的两条直角边 $AC=4$，$BC=3$，D 为斜边 AB 上的动点，现沿 CD 将此三角形折成直二面角 $A-CD-B$，则当 AB 取最小值时，二面角 $B-AC-D$ 的正切值为__________。
- 若方程 $\lg(kx)=2\lg(x+1)$ 只有一个实数解，则 k 的取值范围为__________。
- (较难) 在 $\triangle ABC$ 中，求 $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{4}{1+\sin C}$ 的最小值__________。
- (较难) 已知 $\triangle ABC$ 三边长均为有理数，求证：
  - (1) $\cos A$ 为有理数；
  - (2) 对任意 $n\in N^*$，均有 $\cos nA$ 为有理数。
- 已知 x,y,z 均为实数，A,B,C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，证明：

$$x^2+y^2+z^2\geq 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$$

- 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\geq 0(a<b)$ 恒成立，则 $|\frac{a+3b+9c}{b-a}|$ 的最小值为__________。
- (20 分) 对于任意实数 x 和任意 $\theta\in[\pi,\frac{3}{2}\pi]$，均有 $(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geq\frac{1}{8}$，求实数 a 的取值范围__________。

- 在梯形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，$|\overrightarrow{BC}|=6$，$P$ 为梯形 $ABCD$ 所在平面上一点，且满足 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{DP}=0$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{DA}|\cdot|\overrightarrow{DP}|$，$Q$ 为边 AD 上的一个动点，则 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的最小值为__________。
- 设 $\alpha,\beta,\gamma\in R$，且满足 $\sin\alpha\cdot\cos\beta+|\cos\alpha\cdot\sin\beta|=\sin\alpha\cdot|\cos\alpha|+|\sin\beta|\cdot\cos\beta$，则 $(\tan\gamma-\sin\alpha)^2+(\cot\gamma-\cos\beta)^2$ 的最小值为__________。
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且满足 $a_{n+1}+a_n=4\times 3^n(n\in N^*)$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$__________。
- (较难) 已知正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=2+\sqrt{a_{n-1}}-2\sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}}$，$S_n$ 为数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项的和，求 $S_{2023}=$__________。
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$S_{n+1}=2S_n-\frac{n(n+1)}{2}+1$，其中 S_n 表示数列前 n 项的和。若定义 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n$，则集合 $S=\{n\in N^*|\Delta(\Delta a_n)\geq -2015\}$ 中的元素的个数为__________。
- 设正数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 满足：a_1,a_2,a_3 成公差为 b_1 的等差数列，b_1,b_2,b_3 成公比为 a_1 的等比数列，且 $a_3=b_3$。求 a_3 的最小值，并确定当 a_3 取到最小值时 a_2b_2 的值__________。
- 在边长为 1 的正六边形的六个顶点中随机取出三个顶点，则这三点中有两点的距离为 $\sqrt{3}$ 的概率为__________。
- 定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足：当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=2^x-x$，且对任意实数 x，均有 $f(x)+f(x+1)=1$。记 $a=\log_2 3$，则表达式 $f(a)+f(2a)+f(3a)$ 的值为__________。
- 已知锐角 α,β 满足 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\cos(\alpha+\beta)$，则 $\tan\alpha$ 的最大值为__________。
- 若实数 x 满足 $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2-x^2}=\frac{1}{x}$，则 $x=$__________。
- 在 $\triangle ABC$ 中，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，I 为 $\triangle ABC$ 的内心，已知 $OI\parallel BC$，$\cos B=\frac{1}{7}$，则 $\cos C=$__________。
- 若存在直线与 $f(x)=x^3-x$ 和 $g(x)=x^2+a$ 都相切，则 a 的取值范围为__________。
- 正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_7$ 满足 $a_1<a_2<\cdots<a_7$，$a_1+a_2+\cdots+a_7=2023$，且最大公因子 $d=(a_1,a_2,\cdots,a_7)>1$，则当 d 取最小值时，a_7 的最大值为__________。
- 已知实数 x,y 满足 $2^x+2^y=4^x+4^y$，则 $z=8^x+8^y$ 的取值范围为__________。
- 设点 $A(1,-1)$，$B(4,0)$，$C(2,2)$。由所有满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(1<\lambda\leq a,1<\mu\leq b)$ 的点 $P(x,y)$ 组成平面区域 D。若区域 D 的面积为 8，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$__________。
- 已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-x\ln x$，若对 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$ 有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}>a$ 恒成立，则 a 的取值范围为__________。
- 在锐角 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，且 $2c\cos A=b-c$，则 $\frac{\sin(B-C)}{2\sin A}$ 的取值范围是__________。
- 已知函数 $f(x)=\frac{2\cos x+\sin x-3}{2\cos x-3}$ 在 $[-2025,2025]$ 上的值域为 $[m,M]$，则 $m+M=$__________。
- 计算：$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(4+h)^3-7(4+h)}-6}{h}=$__________。
- 已知实数 a,b,c,m,n 满足 $3m+n=\frac{b}{a}$，$mn=\frac{c}{a}$，若 a,b,c 均为奇数，证明：m,n 不都为整数。

- 三位数 123,363 具有这样的特征：其中任意两个数字之和均可以被第三个数整除，则具有此性质的三位数共有__________。

- (较难) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长均为整数，$\angle A = 2\angle B$，$\angle C > 90°$，求 $\triangle ABC$ 周长的最小值__________。

- (较难) 已知函数 $f(x) = \frac{xe^x}{e^x-1}$,若方程 $(\ln x+m)f(x) = e^x$ 有两个不同的实数解 $x_1, x_2(x_1 < x_2)$，证明：$\ln x_1 + x_2 + \frac{1}{e} < m$（参考数据：$e \approx 2.718$）。

- 已知在四面体 $P-ABC$ 中，$PA = BC = 2$，$PB = AC = \sqrt{7}$，$PC = AB = \sqrt{5}$，$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$，平面 β 满足 $MN \perp \beta$，记平面 β 截得该四面体 $P-ABC$ 的多边形的面积为 S，则 S 的最大值为__________。

- 在平面上，$PA \perp PB$，$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$，且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$，若 $|\overrightarrow{OQ}| < \frac{1}{2}$，则 $|\overrightarrow{OP}|$ 的取值范围为__________。

- 在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB = BC = CD$，$\angle ABC = 70°$，$\angle BCD = 170°$，则 $\angle BAD =$__________。

- 已知函数 $y = f(x)$ 的图像既关于点 $(1, 1)$ 中心对称，又关于直线 $x + y = 0$ 轴对称。若 $x \in (0, 1)$ 时，$f(x) = \log_2(x + 1)$，则 $|f(\log_2 10)| =$__________。

- 已知定义在正实数集上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2) \neq 0$，且对任意的实数 b，有 $f(x^b) = bf(x)$。若方程 $f(mx) \cdot f(mx^2) = 4f^2(2)$ 的所有解大于 1，求正实数 $[m]$ 的取值范围__________。

- (较难) 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 $4\sqrt{6}$，高为 $6\sqrt{2}$，其内切球与面 PAB 切于点 M，球面上与 P 距离最近的点记为 N，若平面 α 过点 M, N 且与 AB 平行，则平面 α 截该正四棱锥所得截面的面积为__________。

- 某班有 4 位同学排成一队跑步，再列队时，同学们均不希望他前面的同学与前次相同，则有__________ 种不同的排法。

- 若 $\sin\frac{\pi}{10}$ 是函数 $f(x) = ax^3 - bx + 1(a, b \in N^*)$ 的一个零点，则 $f(1) =$__________。

- 已知 a, b 均为实数，若不等式 $|2ax^2 + (4a + b)x + 4a + |b|| \leq 2|x + 1|$ 对任意 $x \in [-\frac{1}{4}, 1]$ 恒成立，则 $3a + b$ 的最大值为__________。

- (难) 定义在数轴上的开区间 (α, β) 的长度为 $\beta - \alpha$。设 $a\cos A + b\sin A + c = 0(a \neq 0)$，其中 $bc < 0$，$A \in (0, \frac{\pi}{4})$，试给出一个长度小于 1 的开区间 (s, t)，使得二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 在区间 (s, t) 上至少有一个实根。