斐波那契数列 (Fibonacci Sequence)

高 2023 级 1 班　　谢宇轩

2025 年 5 月 23 日

1　定义

- **递推式**

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F(1)=1 \\ F(n)=F(n-1)+F(n-2) \end{cases} \qquad (n \in N)$$

- **通项公式**

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

注　适用于 $F(0)=0, F(1)=1$ 的情况.

- **证法**　特征根法, 等比数列构造法, 生成函数构造法.

2　生成函数证法

- 定义生成函数:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n = 0 + x + F(2)x^2 + F(3)x^3 + \cdots$$

- 代入递推关系:

$$\begin{aligned} G(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty}[F(n-1)+F(n-2)]x^n \\ &= x + x\sum_{n=1}^{\infty}F(n)x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty}F(n)x^n \\ &= x + xG(x) + x^2G(x) \end{aligned}$$

整理得:

$$G(x)(1-x-x^2) = x \quad \Rightarrow \quad G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

- 解方程 $1-x-x^2=0$ 得根:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

将分母分解为:

$$1-x-x^2 = (1-\alpha x)(1-\beta x)$$

设部分分式分解:

$$\frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}$$

解得系数:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

因此:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right)$$

- 展开为几何级数:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}x^n \end{aligned}$$

比较系数得通项公式:

$$F(n) = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

3 重要的结论

- 当 $n \geq 0$ 时，$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
- 当 $n \geq 1$ 时，$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- 当 $m, n \geq 0$，则 $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$
- 当 $n \geq 0$，则 $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots = F_{n+1}$，可用生成函数，递推式等方法证明.
- 当 $n \geq 1$，则 $F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n-1}$
- 当 $n \geq 1$，则 $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- 当 $n \geq 0$，则 $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$
- 当 $n \geq 2$，则 $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$
- 当 $n \geq 0$，则 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kF_k = (-1)^nF_{n-1} - 1$
- 当 $n \geq 0$，则 $\sum_{k=0}^{n}F_k^2 = F_nF_{n+1}$
- 当 $n \geq 2$，则 $2F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$
- 当 $n \geq 2$，则 $3F_n = F_{n+2} + F_{n-2}$
- 当 $n \geq 2$，则 $4F_n = F_{n+2} + F_n + F_{n-2}$，其实这上面三个都是一样的.
- 当 $n \geq 2$，则 $F_{n+1}F_n - F_{n-1}F_{n-2} = F_{2n-1}$
- 当 $n \geq 1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2n-1}F_kF_{k+1} = F_{2n}^2$