1 附录

1.1 对 $\Sigma_{k=1}^{n} k^2 x^k$ 的通项公式的证明

如果感兴趣再阅读.

解答:

$\sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$ 的通项公式为:

当 $x \neq 1$ 时,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k = \frac{x + x^2 - (n^2+2n+1)x^{n+1} + (2n^2+2n-1)x^{n+2} - n^2 x^{n+3}}{(1-x)^3}$$

当 $x = 1$ 时,

$$S_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

证明:

我们从等比数列的求和公式出发:

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1$$

为什么我们要这么做? 我们**注意到**目标级数 $\sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$ 中含有 k^2 和 x^k 这两部分。等比级数已经有了 x^k 的形式,我们需要通过运算引入 k 或 k^2 这样的系数。

对 $G_n(x)$ 关于 x 求导,得到:

$$G_n'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$$

同时,对 $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ 求导:

$$\begin{aligned}
G_n'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) \\
&= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

将 $G_n'(x)$ 乘以 x,得到:

$$xG_n'(x) = x\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k x^k$$

$$xG_n'(x) = x\frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

相信你已经发现了这是 $\Sigma_{k=1}^{n} k x^k$ 的通项公式。也就是引入了系数 k 。

设 $H_n(x) = xG_n'(x) = \sum_{k=1}^n kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$。再次对 $H_n(x)$ 关于 x 求导：

$$\begin{aligned}
H_n'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^n kx^k\right) = \sum_{k=1}^n k^2x^{k-1} \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}\right) \\
&= \frac{(1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1})(1-x)^2-(x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2})\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} \\
&= \frac{(1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1})(1-x)+2(x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2})}{(1-x)^3} \\
&= \frac{1-x-(n+1)^2x^n+(n+1)^2x^{n+1}+n(n+2)x^{n+1}-n(n+2)x^{n+2}+2x-2(n+1)x^{n+1}+2nx^{n+2}}{(1-x)^3} \\
&= \frac{1+x-(n^2+2n+1)x^n+(n^2+2n+1+n^2+2n-2n-2)x^{n+1}+(2n-n^2-2n)x^{n+2}}{(1-x)^3} \\
&= \frac{1+x-(n^2+2n+1)x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

最后，将 $H_n'(x)$ 乘以 x，得到：

$$xH_n'(x) = x\sum_{k=1}^n k^2x^{k-1} = \sum_{k=1}^n k^2x^k = S_n(x)$$

$$S_n(x) = xH_n'(x) = \frac{x(1+x-(n^2+2n+1)x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2})}{(1-x)^3}$$

$$S_n(x) = \frac{x+x^2-(n^2+2n+1)x^{n+1}+(2n^2+2n-1)x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}$$

即 $\sum_{k=1}^n k^2x^k$ 的通项公式。
当 $x=1$ 时，级数变为 $\sum_{k=1}^n k^2$，这是平方和公式，其结果为：

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

此公式为已知的平方和公式，可以通过数学归纳法或其它方法证明。

你已经学会了，尝试来做一道练习题吧（笑）!

1.2 练习题

尝试证明 $\Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2x^k$ 的通项公式为：

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2x^k = nx(1+nx)(1+x)^{n-2} = (nx+n^2x^2)(1+x)^{n-2}$$

其中

$$\binom{n}{k} = C_n^k$$