排列组合

高 2023 级 1 班　　谢宇轩

2025 年 5 月 18 日

1　排列组合

- **记 1**

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

- **记 2**

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

- **记 3**

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

- **记 4**

$$\sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}$$

带权和式子，通过多项式求导得。

- **记 5**

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

- **记 6**

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

- **记 7**

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n-i}{i} = F_{n+1}$$

其中 F 为斐波那契数列。

- **错排**

$$D_n = n! - n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

错排。

- **卡特兰数**

$$H_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}(n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$H_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}(n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$H_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

$$H_n = \frac{H_{n-1}(4n-2)}{n+1}$$

Catalan 数列 H_n 可以应用于以下问题：

1. 有 $2n$ 个人排成一行进入剧场。入场费 5 元。其中只有 n 个人有一张 5 元钞票，另外 n 人只有 10 元钞票，剧院无其它钞票，问有多少种方法使得只要有 10 元的人买票，售票处就有 5 元的钞票找零?
2. 有一个大小为 $n \times n$ 的方格图左下角为 $(0,0)$ 右上角为 (n,n)，从左下角开始每次都只能向右或者向上走一单位，不走到对角线 $y = x$ 上方（但可以触碰）的情况下到达右上角有多少可能的路径?
3. 在圆上选择 $2n$ 个点，将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数?
4. 对角线不相交的情况下，将一个凸多边形区域分成三角形区域的方法数?
5. 一个栈（无穷大）的进栈序列为 $1, 2, 3, \cdots, n$ 有多少个不同的出栈序列?
6. n 个结点可构造多少个不同的二叉树?
7. 由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 组成的 $2n$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$，其部分和满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, 2n)$，有多少个满足条件的数列?

2 排列组合简单习题

- **例 1** 求

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \binom{n}{15} + \dots$$

- **例 2** 尝试说明，对于 n 个篮子，每个篮子至少分 a_i $(\Sigma a_i \leq n)$ 个物品，有

$$\binom{n - \sum a_i + k - 1}{n - \sum a_i}$$

种分法。

- **例 3** 在 $1 \sim n$ 这 n 个自然数中选 k 个，这 k 个数都不相邻，问有多少种组合?

- **例 4** 多重集是指包含重复元素的广义集合。设 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k\}$ 表示由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，$\cdots$，n_k 个 a_k 组成的多重集，S 的全排列个数为?

- **例 5** 求

$$\sum_{i=0}^{n} (\mathrm{C}_n^i)^2$$

- **例 6** 证

$$\sum_{i=0}^{n} i\mathrm{C}_n^i = n2^{n-1}$$

要求使用两种方法。

- **例 7** 化简：
$$\sum_{i=0}^{n} i\mathrm{C}_n^i\mathrm{C}_m^i$$

- **例 8** 6 位女同学和 15 位男同学围成 1 圈跳集体舞，要求每两名女同学之间至少有两名男同学，那么共有多少种不同的围圈跳舞的方法?

- **例 9** 现安排 7 名同学参加 5 个运动项目，要求甲、乙两同学不能参加同一项目，每个项目都有人参加，每人只参加一个项目，则满足上述要求的不同的安排方案数为?

- **例 10** 取出伍角、壹元、贰元、伍元、拾元、伍拾元、壹百元的纸币共 10 张，共有多少种不同的取法?

- **例 11** 证
$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_n^{n+1-k} = \mathrm{C}_{2n}^{n+1}$$

- **例 12** 证
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}2^{2k}\mathrm{C}_{n+k+1}^{2k+1} = n+1$$

3 参考答案

- **例 1**
$$\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\binom{n}{15}+\ldots=\frac{2^n+\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^n-\mathrm{i}(1-\mathrm{i})^n}{4}$$

- **例 2** 略。

- **例 3**
$$\binom{n-k+1}{k}$$

- **例 4**
$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

- **例 5**
$$C_{2n}^{n}$$

- **例 6**
法 1：利用组合恒等式 $i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1}$。
$$i\binom{n}{i}=i\cdot\frac{n!}{i!(n-i)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}=n\binom{n-1}{i-1}.$$
所以
$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}.$$
（令 $k=i-1$，则当 $i=1$ 时 $k=0$，当 $i=n$ 时 $k=n-1$。）
$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=2^{n-1}.$$

即

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}.$$

法 2：多项式求导法生成函数构造：考虑二项式展开式：

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i.$$

两边对 x 求导：

$$\frac{d}{dx}(1+x)^n = n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} x^{i-1}.$$

两边乘以 x，得到：

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} x^i.$$

令 $x=1$，左边为：

$$n \cdot 1 \cdot (1+1)^{n-1} = n \cdot 2^{n-1},$$

右边为：

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} \cdot 1^i = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}.$$

因此：

$$\boxed{n \cdot 2^{n-1}}$$

- **例 7**

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}\binom{m}{i} = n\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1}\binom{m}{i}.$$

令 $k = m-1$ ，则

$$n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\binom{m}{k+1}.$$

由 $\sum_k \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$ 得：

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\binom{m}{k+1} = \binom{n+m-1}{m-1}.$$

因此

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}\binom{m}{i} = n\binom{n+m-1}{m-1}.$$

- **例 8**

$$A_{15}^{12} \times 8!$$

- **例 9**

$$15000.$$

- **例 10**

$$C_{16}^{6}$$

- **例 11, 12** 我还不会，故略。