蒙日圆专题

高 2023 级 1 班　　谢宇轩

2025 年 7 月 28 日

1　蒙日圆的定义与推导

1.1　蒙日圆的定义

过圆锥曲线外一点作两条互相垂直的切线，那么这一点的轨迹是一个圆，这个圆被称为蒙日圆，又叫外准圆。对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其蒙日圆方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$。

1.2　以椭圆为例的证明方法

- **解析法 + 韦达定理：**
  - **当两条切线斜率均存在且不为 0 时**：设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm a,y_0\neq\pm b)$，过 P 的椭圆的切线方程为
  $$y-y_0=k(x-x_0)$$
  联立椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，消去 y 得到一个关于 x 的一元二次方程，由判别式 $\Delta=0$，可得
  $$(x_0^2-a^2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-b^2=0$$
  因为 k_{PA},k_{PB} 是这个关于 k 的一元二次方程的两个根，所以
  $$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}$$
  又因为 $PA\perp PB$，所以
  $$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$$
  即
  $$\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}=-1$$
  整理可得
  $$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$$
  - **当两条切线有斜率不存在或斜率为 0 时**：可得点 P 的坐标为 $(\pm a,\pm b)$，此时点 P 也在圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上。
- **几何法**：设椭圆中心为 O，焦点是 F_1,F_2，焦点到中心距离为 c。PM,PN 是椭圆两条切线，且互相垂直，连 OP，作 $OG\perp PM$，$OH\perp PN$，并做 $F_1D\perp PM$，做 $F_1K\perp OG$，记 $\angle OF_1K=k$，则
$$DG=F_1K=c\cdot\cos k$$

由勾股定理，有

$$OG^2 = OD^2 - DG^2 = a^2 - c^2 \cos^2 k$$

考虑另一焦点 F_2，做 $F_2E \perp PN$，$F_2L \perp OH$，仿上得

$$OH^2 = a^2 - c^2 \sin^2 k$$

进而得到

$$OP^2 = OH^2 + OG^2 = a^2 + (a^2 - c^2) = a^2 + b^2$$

所以

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2}$$

双曲线的蒙日圆方程为

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2 \quad (a > b > 0)$$

双曲线的证明过程与椭圆类似。

1.3 阿基米德三角形

抛物线 $y^2 = 2px$ 的两条互相垂直的切线的交点在其准线上。

设抛物线方程为 $y^2 = 2px(p > 0)$，设抛物线上一点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，且满足 $y_1^2 = 2px_1$，$y_2^2 = 2px_2$。

对 $y^2 = 2px$ 求导，根据求导公式 $(X^n)' = nX^{n-1}$ 可得：

$$2y \cdot y' = 2p$$

则

$$y' = \frac{p}{y}$$

所以在点 A 处的切线斜率为

$$k_1 = \frac{p}{y_1}$$

在点 B 处的切线斜率为

$$k_2 = \frac{p}{y_2}$$

因为两条切线垂直，所以

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

即

$$\frac{p}{y_1} \cdot \frac{p}{y_2} = -1$$

可得

$$y_1 y_2 = -p^2$$

设两切线交点为 $P(x_0, y_0)$，根据点斜式写出过点 A 的切线方程为

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

因为 $y_1^2 = 2px_1$，所以切线方程可化为

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - \frac{y_1^2}{2p})$$

即

$$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{y_1}{2}$$

同理，过点 B 的切线方程为

$$y = \frac{p}{y_2}x + \frac{y_2}{2}$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 是两条切线的交点，所以

$$\begin{cases} y_0 = \frac{p}{y_1}x_0 + \frac{y_1}{2} \\ y_0 = \frac{p}{y_2}x_0 + \frac{y_2}{2} \end{cases}$$

两式相减可得：

$$0 = \left(\frac{p}{y_1} - \frac{p}{y_2}\right)x_0 + \frac{y_1}{2} - \frac{y_2}{2}$$

即

$$x_0 = -\frac{y_1 y_2}{2p}$$

将 $y_1 y_2 = -p^2$ 代入可得

$$x_0 = -\frac{-p^2}{2p} = \frac{p}{2}$$

所以抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 两条互相垂直切线的交点轨迹方程是

$$x = -\frac{p}{2}$$

即交点在抛物线的准线上。

2 椭圆蒙日圆的性质

- **性质 1** 圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上的动点 P 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的两条切线 PA、PB，则 $PA \perp PB$。
- **性质 2** 设 P 为圆 $O: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上一点，过点 P 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条切线，切点分别为 A、B，延长 PA、PB 交圆 O 于两点 C、D，则：
  - C、O、D 三点共线。
  - $CD \parallel AB$。
  - $k_{OP} \cdot k_{CD} = -\frac{b^2}{a^2}$，$k_{OP} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$，$k_{OA} \cdot k_{PA} = -\frac{b^2}{a^2}$，$k_{OB} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$。
  - $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^4}{a^4}$。
  - 上面每个 item 的第一个杠不是负号。
- **性质 3** 过圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上的动点 P 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的两条切线，O 为原点，则 PO 平分椭圆的切点弦 AB（由性质 2 中的 $k_{OP} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$ 可证）。

3 例题

- **例 0** 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的蒙日圆为 O：$x^2+y^2=a^2+b^2$，过蒙日圆 O 上一点 P 作椭圆 C 的两条切线 PA、PB，切点分别为 A、B，直线 AB 与 x 轴、y 轴分别交于 M、N 两点，求 $\triangle MON$ 面积的最小值。

- **解析** 设 $P(x_0,y_0)$，满足 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$。同样可得到直线 AB 的方程为
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$
则点 M 的坐标为 $\left(\frac{a^2}{x_0},0\right)$，点 N 的坐标为 $\left(0,\frac{b^2}{y_0}\right)$。
$\triangle MON$ 的面积为
$$S=\frac{1}{2}\left|OM\right|\cdot\left|ON\right|=\frac{a^2b^2}{2\left|x_0y_0\right|}$$
由条件 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2\geq 2\left|x_0y_0\right|$，可以得到
$$\left|x_0y_0\right|\leq\frac{a^2+b^2}{2}$$
所以
$$S=\frac{a^2b^2}{2\left|x_0y_0\right|}\geq\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$
当且仅当 $\left|x_0\right|=\left|y_0\right|=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 时，面积取等号。
因此，$\triangle MON$ 的面积的最小值为
$$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

- **例 1** 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，P 为圆 $x^2+y^2=5$ 上的一个动点，过 P 的切线与椭圆 C 相切于 A，B 两点，与圆相交于 C，D 两点，求证：$AB\parallel CD$。

- **解析**
设 AB 与 OP 交于点 M。由性质 2 可知，M 为 AB 中点；由性质 1 可知，$\angle APB=90^\circ$，所以 $MA=MB=MP$。由圆的性质可知，$OP=OC=OD$，因此 $\angle PAM=\angle APM=\angle CPO=\angle PCO$，所以 $AB\parallel CD$。

- **例 2** 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，离心率 $\frac{\sqrt{5}}{3}$。
  - **问题**
    * 求椭圆 C 的标准方程。
    * 若动点 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆 C 外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程。（规范大题过程用）
  - **解析**
    * 由 $c=\sqrt{5}$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，可得 $a=3$，$b^2=a^2-c^2=4$，椭圆 C 的标准方程为：
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

* **解法 1：构造同构式**；设两切线为 l_1，l_2。当 $l_1 \perp x$ 轴或 $l_1 \parallel x$ 轴时，对应 $l_2 \parallel x$ 轴或 $l_2 \perp x$ 轴，可知 $P(\pm 3, \pm 2)$；
  当 l_1 与 x 轴不垂直且不平行时，$x_0 \neq \pm 3$，设 l_1 的斜率为 k，则 $k \neq 0$，l_2 的斜率为 $-\frac{1}{k}$。l_1 的方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$，联立 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$，根据直线与椭圆相切 $\Delta = 0$，可得：
  $$(x_0^2 - 9)k^2 - 2x_0 y_0 k + y_0^2 - 4 = 0$$
  k 和 $-\frac{1}{k}$ 是该方程的两个根，所以：
  $$k \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) = \frac{y_0^2 - 4}{x_0^2 - 9} = -1$$
  整理得：
  $$x_0^2 + y_0^2 = 13 \quad (x_0 \neq \pm 3)$$
  综上，点 P 的轨迹方程为：
  $$x^2 + y^2 = 13$$
* **解法 2：利用椭圆的光学性质**；设椭圆的中心为 O，F_1、F_2 分别为椭圆的左右焦点，$|F_1F_2| = 2\sqrt{5}$。设椭圆的两条切线为 PA、PB，M、N 分别为 F_1 关于 PA、F_2 关于 PB 的对称点。
  由椭圆的光学性质知 F_2、A、M 及 F_1、B、N 分别三点共线，由椭圆定义有 $MF_2 = NF_1 = 2a$。
  设 F_1M 交直线 PA 于点 Q，F_2N 交直线 PB 于点 S，分别延长 MF_1、NF_2 交于点 R。则 $OQ = \frac{1}{2}MF_2 = \frac{1}{2}NF_1 = OS = a = 3$，$OR = \frac{1}{2}F_1F_2 = c = \sqrt{5}$，在矩形 $PQRS$ 中，由平面几何知识知：
  $$OP^2 + OR^2 = OQ^2 + OS^2$$
  代入得：
  $$OP^2 = OQ^2 + OS^2 - OR^2 = 9 + 9 - 5 = 13$$
  所以点 P 的轨迹方程为：
  $$x^2 + y^2 = 13$$

- **例 4** 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 1$，若直线 $y = kx + 2$ 上存在点 P 使得过点 P 与圆 C 相切的两切线互相垂直，则实数 k 的取值范围是？
  - **答案** $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
  - **解析**：圆的蒙日圆为 $x^2 + y^2 = 2$（可将圆看成 a, b 相等的椭圆），由题意可知，直线 $y = kx + 2$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 有公共点。根据点到直线距离公式，$\frac{2}{\sqrt{k^2+1}} \leq \sqrt{2}$，解得 $k \geq 1$ 或 $k \leq -1$。
- **例 5** 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$，直线 $l: mx + y - 3m - 2 = 0$，若直线上存在点 P 使得过点 P 总能作两条互相垂直的切线，则实数 m 的取值范围是？
  - **答案** $[-\frac{12}{5}, 0]$
  - **解析**：椭圆的蒙日圆为 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$，这里应该是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$，其蒙日圆为 $x^2 + y^2 = 7$，所有满足条件的点都在蒙日圆上。由题意可知，直线与圆有公共点，由 $\frac{|3m+2|}{\sqrt{m^2+1}} \leq 2$，得 $-\frac{12}{5} \leq m \leq 0$。

- **例 6** 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$l:x+y=4$，由动点 M 向椭圆引两条切线 l_1，l_2，且 l_1，l_2 夹角为钝角，则动点 M 到直线 l 的距离的取值范围是？
  - **答案** $[2\sqrt{2}-\sqrt{7},2\sqrt{2}+\sqrt{7}]$
- **例 7** 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 上一点 P 及坐标原点 O 作直线 l 与圆 $x^2+y^2=a^2+1$ 交于 A，B 两点。若存在一点 P 满足 $a^2=|PA|\cdot|PB|+1$，则实数 a 的取值范围是？
  - **答案** $[\sqrt{2},+\infty)$
  - **解析:** 根据圆幂定理 $a^2=|PA|\cdot|PB|+1=(\sqrt{a^2+1}-|OP|)(\sqrt{a^2+1}+|OP|)+1=a^2+2-|OP|^2$，故 $|OP|=\sqrt{2}$，又 $|OP|\le a$，故 $a\ge\sqrt{2}$，所以实数 a 的取值范围是 $[\sqrt{2},+\infty)$。
- **例 8** 已知圆 $O:x^2+y^2=34$，椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，若点 P 在圆 O 上，线段 OP 的垂直平分线经过椭圆的右焦点，求点 P 的横坐标。
  - **答案** $\frac{17}{4}$
  - **解析:** 设点 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2=34$。椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点 $F(4,0)$，因为点 F 在线段 OP 的垂直平分线上，所以 $|PF|=|OF|$，即 $(x_0-4)^2+(y_0-0)^2=4^2$，$x_0^2-8x_0+y_0^2=0$。联立

    $$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=34\\x_0^2-8x_0+y_0^2=0\end{cases}$$

    解得 $x_0=\frac{17}{4}$，所以点 P 的横坐标为 $\frac{17}{4}$。
- **例 10** 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+y^2=1(m>1)$，若存在过 $(1,2)$ 且相互垂直的直线 l_1，l_2 使得 l_1，l_2 与椭圆 C 均无公共点，则该椭圆离心率的取值范围是？
  - **答案** $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$
  - **解析:** 椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+y^2=1(m>1)$，显然 l_1，l_2 中一条斜率不存在和另一条斜率为 0 时，两直线与椭圆相交。可设 $l_1:y-2=k(x-1)$，即 $y=kx+2-k$，联立椭圆方程可得

    $$(1+mk^2)x^2+2km(2-k)x+m(2-k)^2-m=0$$

    由直线和椭圆无交点，可得 $\Delta=4k^2m^2(2-k)^2-4(1+mk^2)[m(2-k)^2-m]<0$，化为

    $$(m-1)k^2+4k-3<0$$

    解得 $\frac{-2-\sqrt{3m+1}}{m-1}<k<\frac{-2+\sqrt{3m+1}}{m-1}$。由两直线垂直的条件，将 k 换为 $-\frac{1}{k}$，即有

    $$\frac{m-1}{k^2}-\frac{4}{k}-3<0$$

    化为

    $$3k^2+4k-m+1>0$$

    解得 $k>\frac{-2+\sqrt{3m+1}}{3}$ 或 $k<\frac{-2-\sqrt{3m+1}}{3}$。由题意可得 $\frac{-2+\sqrt{3m+1}}{3}<\frac{-2+\sqrt{3m+1}}{m-1}$，$m>1$，可得 $1<m<4$。则

    $$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{m}}\in(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$$

- **例 11** 已知从圆 $C: x^2+y^2=r^2(r>0)$ 上一点 $Q(0,r)$ 作两条互相垂直的直线与椭圆 $\tau: \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切，同时圆 C 与直线 $l: mx+y-\sqrt{3}m-1=0$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为？

  - **解析**：设其中一条切线的斜率为 k，则另一条切线的斜率为 $-\frac{1}{k}$，切线方程分别为：

    $$y=kx+r \quad \text{和} \quad y=-\frac{1}{k}x+r$$

    将 $y=kx+r$ 与椭圆方程联立可得：

    $$x^2+3(kx+r)^2-12=0$$

    整理得：

    $$(1+3k^2)x^2+6krx+3r^2-12=0$$

    则判别式 Δ_1 为：

    $$\Delta_1=36k^2r^2-4(1+3k^2)(3r^2-12)=0 \tag{1}$$

    同理将 $y=-\frac{1}{k}x+r$ 与椭圆方程联立并整理可得：

    $$\left(1+\frac{3}{k^2}\right)x^2-\frac{6r}{k}x+3r^2-12=0$$

    则判别式 Δ_2 为：

    $$\Delta_2=\frac{36r^2}{k^2}-4\left(1+\frac{3}{k^2}\right)(3r^2-12)=0 \tag{2}$$

    由 (1)(2) 联立可得 $k=\pm1$，$r=4$，故圆 C 的方程为：

    $$x^2+y^2=16$$

    注意到直线 $l: mx+y-\sqrt{3}m-1=0$ 过定点 $P(\sqrt{3},1)$，故要使 $|AB|$ 最小，则 $PC\perp AB$。又：

    $$|PC|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$$

    故此时：

    $$|AB|=2\sqrt{16-4}=4\sqrt{3}$$

- **例 12** 设椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两条互相垂直的切线的交点轨迹为 C，曲线 C 的两条切线 PA，PB 交于点 P，且与 C 分别切于 A，B 两点，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值。

  - **答案**　$9(2\sqrt{2}-3)$
  - **解析**：设两切线为 l_1，l_2。
    当 $l_1\perp x$ 轴或 $l_1\parallel x$ 轴时，对应 $l_2\parallel x$ 轴或 $l_2\perp x$ 轴，可知 $P(\pm\sqrt{5},\pm2)$；
    当 l_1 与 x 轴不垂直且不平行时，$x_0\neq\pm\sqrt{5}$，设 l_1 的斜率为 k，则 $k\neq0$，l_2 的斜率为 $-\frac{1}{k}$。l_1 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，联立椭圆方程 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 可得：

    $$(5k^2+4)x^2+10(y_0-kx_0)kx+5(y_0-kx_0)^2-20=0$$

    因为直线与椭圆相切，所以 $\Delta=0$，即：

    $$5(y_0-kx_0)^2k^2-(5k^2+4)[(y_0-kx_0)^2-4]=0$$

化简得：

$$-20k^2+4[(y_0-kx_0)^2-4]=0$$

进一步得到：

$$(x_0^2-5)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-4=0$$

所以 k 是方程 $(x_0^2-5)x^2-2x_0y_0x+y_0^2-4=0$ 的一个根，同理 $-\frac{1}{k}$ 是该方程的另一个根，因此：

$$k\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)=\frac{y_0^2-4}{x_0^2-5}$$

得：

$$x_0^2+y_0^2=9\quad(x_0\neq\pm\sqrt{5})$$

又因为 $P(\pm\sqrt{5},\pm2)$ 满足上式，所以点 P 的轨迹方程为：

$$x^2+y^2=9$$

设 $PA=PB=x$，$\angle APB=\theta$，在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle APB$ 中应用余弦定理：

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cdot\cos\angle APB$$

即：

$$3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos(180^\circ-\theta)=x^2+x^2-2x\cdot x\cdot\cos\theta$$

化简得：

$$x^2=\frac{9(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$$

向量点积为：

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos\angle APB=x\cdot x\cos\theta=\frac{9(1+\cos\theta)\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

令 $t=1-\cos\theta\in(0,2]$，则 $\cos\theta=1-t$，所以：

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{9(2-t)(1-t)}{t}=\frac{9(t^2-3t+2)}{t}=9\cdot\left(t+\frac{2}{t}-3\right)$$

由均值不等式得：

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\geq9\cdot\left(2\sqrt{t\cdot\frac{2}{t}}-3\right)=9(2\sqrt{2}-3)$$

当且仅当 $t=\frac{2}{t}$，即 $t=\sqrt{2}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值 $9(2\sqrt{2}-3)$。

- **例 13** 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 中，其所有外切矩形的顶点在一个定圆 $\Gamma:x^2+y^2=a^2+b^2$ 上，称此圆为该椭圆的**蒙日圆**。该圆由法国数学家 $G\cdot Monge$ $(1746-1818)$ 最先发现。若椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，则下列说法正确的有（ ）

  A. 椭圆 C 外切矩形面积的最小值为 48

  B. 椭圆 C 外切矩形面积的最大值为 48

  C. 点 $P(x,y)$ 为蒙日圆 Γ 上任意一点，点 $M(-10,0)$，$N(0,10)$，当 $\angle PMN$ 取最大值时，$\tan\angle PMN=2+\sqrt{3}$

D. 若椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过椭圆 C 上一点 P 和原点作直线 l 与蒙日圆相交于点 M，N，则 $PF_1\cdot PF_2=PM\cdot PN$

解析: 对于 A，B：如图，设对于椭圆 C 上任意点 M，过点 M 作椭圆的切线交圆 $x^2+y^2=25$ 于 P，Q 两点，P，Q 关于原点对称的点分别为 S，T，则椭圆 C 的一个外切矩形为 $PQST$，则 $S=|PQ|\cdot|QS|$，由图象易知，圆心 O 到直线 PQ 的距离 $d\in[3,4]$，所以 $|PQ|\in[6,8]$. 又 $|PQ|^2+|QS|^2=100$，所以外切矩形为 $PQST$ 的面积 $S=\sqrt{|PQ|^2\cdot(100-|PQ|^2)}\in[48,50]$. 因此 A 对，B 错.

对于 C：当 PM 与圆相切且切点 P 在圆下方时，$\angle PMN$ 最大，$\tan\angle PMO=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle NMO=45°$，$\therefore \tan\angle PMN=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$，C 对.

对于 D：$PF_1+PF_2=8$，$\therefore PF_1^2+PF_2^2+2PF_1\cdot PF_2=64$，$\therefore PF_1^2+PF_2^2=64-2PF_1\cdot PF_2$，

$$\begin{cases}\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}\\ \overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2}=\overrightarrow{F_2F_1}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{PF_1}^2+\overrightarrow{PF_2}^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=4\overrightarrow{PO}^2 & (1)\\ \overrightarrow{PF_1}^2+\overrightarrow{PF_2}^2-2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\overrightarrow{F_1F_2}^2 & (2)\end{cases}$$

(1)+(2) 得 $PF_1^2+PF_2^2=2PO^2+14$，$\therefore PO^2=25-PF_1\cdot PF_2$，$PM\cdot PN=(r-OP)(r+OP)=25-(25-PF_1\cdot PF_2)=PF_1\cdot PF_2$，故 D 正确. 故选：ACD.

- **例 14** 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P,Q 均在 C 的蒙日圆 O 上，PA,PB 分别与 C 相切于 A,B，则下列说法正确的是（ ）

A. C 的蒙日圆方程是 $x^2+y^2=4$

B. 设 $N(1,1)$，则 $|AN|+|AF_2|$ 的取值范围为 $[4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}]$

C. 长方形 R 的四条边均与椭圆 C 相切，长方形 R 的面积的最大值为 14

D. 若直线 PQ 过原点 O，且与 C 的一个交点为 G，$|GF_1|\cdot|GF_2|=3$，则 $|GP|\cdot|GQ|=3$

解析: 对于 A，分别过椭圆 C 的顶点 $(2,0)$，$(0,\sqrt{3})$ 作椭圆 C 的切线，则两切线的交点 $Q(2,\sqrt{3})$ 在椭圆 C 的蒙日圆上，故该蒙日圆的半径 $r=|OQ|=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$，即椭圆 C 的蒙日圆的方程为 $x^2+y^2=7$，故 A 错误；

对于 B，由椭圆的定义得 $|AN|+|AF_2|=|AN|+4-|AF_1|=4+|AN|-|AF_1|\le 4+|NF_1|=4+\sqrt{(-1-1)^2+1^2}=4+\sqrt{5}$，当且仅当点 A 在 NF_1 的延长线上时取等号，$|AN|+|AF_2|=4-(|AF_1|-|AN|)\ge 4-|NF_1|=4-\sqrt{(-1-1)^2+1^2}=4-\sqrt{5}$，当且仅当点 A 在 F_1N 的延长线上时取等号，所以 $|AN|+|AF_2|$ 的取值范围为 $[4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}]$，故 B 正确；

对于 C，设长方形 R 的长为 m，宽为 n，则 $m^2+n^2=(2r)^2=28$，所以长方体的面积等于 $S=mn\le\frac{1}{2}(m^2+n^2)=14$，当且仅当 $m=n=\sqrt{14}$ 时等号成立，故 C 正确；

对于 D，$|GF_1|+|GF_2|=2a=4$，则 $|GF_1|^2+|GF_2|^2+2|GF_1|\cdot|GF_2|=16$，所以 $|GF_1|^2+|GF_2|^2=10$. 由 $\overrightarrow{GF_1}+\overrightarrow{GF_2}=2\overrightarrow{GO}$ 得

$$|GF_1|^2+|GF_2|^2+2\overrightarrow{GF_1}\cdot\overrightarrow{GF_2}=4|\overrightarrow{GO}|^2 \tag{1}$$

由 $\overrightarrow{GF_1}-\overrightarrow{GF_2}=\overrightarrow{F_2F_1}$ 得

$$|GF_1|^2+|GF_2|^2-2\overrightarrow{GF_1}\cdot\overrightarrow{GF_2}=|\overrightarrow{F_1F_2}|^2 \tag{2}$$

则 (1) + (2) 得 $20=4|\overrightarrow{GO}|^2+4$，解得 $|\overrightarrow{GO}|^2=4$，所以 $|GP|\cdot|GQ|=(r-|GO|)\cdot(r+|GO|)=r^2-|GO|^2=7-4=3$，故 D 正确.

故选：BCD.

4 结语

- 最近一次更新：2025 年 7 月 28 日
- 如果有问题，请反馈。